Introducción a la ecuación del calor estocástica

David Nualart

Department of Mathematics
Kansas University

XIX Escuela de Probabilidad y Estadística
19-23 Abril 2021, CIMAT

Programa

1. Ecuación del calor
2. Ruido blanco y movimiento browniano
3. Ecuación del calor con ruido aditivo
4. Ecuación del calor estocástica no lineal

Ecuación del calor

- Consideremos la ecuación en derivadas parciales :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. La solución es una función $u(t, x)$.

Ecuación del calor

- Consideremos la ecuación en derivadas parciales :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

  donde $t > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. La solución es una función $u(t, x)$.
- Para cada $y \in \mathbb{R}$, la siguiente función satisface esta ecuación :

$$x \to p_t(x - y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}.$$

- $x \to p_t(x - y)$ es la densidad de la ley normal de media y y varianza t.

- Cuando $t \to 0$, $p_t(x-y)$ converge hacia una medida de probabilidad concentrada en el punto y, que denotaremos por δ_y.

- Cuando $t \to 0$, $p_t(x-y)$ converge hacia una medida de probabilidad concentrada en el punto y, que denotaremos por δ_y.
- Es decir, para toda función continua y acotada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenemos

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x)p_t(x-y)dx = f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_y(x)dx.$$

- Cuando $t \to 0$, $p_t(x-y)$ converge hacia una medida de probabilidad concentrada en el punto y, que denotaremos por δ_y.
- Es decir, para toda función continua y acotada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenemos

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) p_t(x-y) dx = f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta_y(x) dx.$$

Demostración :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) p_t(x-y) dx = E[f(\sqrt{t}Z + y)] \to f(y).$$

- Cuando $t \to 0$, $p_t(x-y)$ converge hacia una medida de probabilidad concentrada en el punto y, que denotaremos por δ_y.
- Es decir, para toda función continua y acotada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenemos

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x)p_t(x-y)dx = f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_y(x)dx.$$

Demostración :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)p_t(x-y)dx = E[f(\sqrt{t}Z + y)] \to f(y).$$

- Cuando $t \to 0$, $p_t(x-y)$ converge hacia una medida de probabilidad concentrada en el punto y, que denotaremos por δ_y.
- Es decir, para toda función continua y acotada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenemos

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) p_t(x-y) dx = f(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta_y(x) dx.$$

Demostración :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) p_t(x-y) dx = E[f(\sqrt{t}Z + y)] \to f(y).$$

- Conclusión : $u(t,x) = p_t(x-y)$ es la solución de la ecuación del calor con condición inicial $u(0,x) = \delta_y(x)$.

Interpretación

- Si la condición inicial $u(0,x) = u_0(x)$ es una función continua y acotada, existe una única solución igual a

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}} p_t(x-y)u_0(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} u_0(y)dy. \end{aligned}$$

- Añadimos a la ecuación una fuente de calor externa $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que suponemos continua y acotada. Es decir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f.$$

- Añadimos a la ecuación una fuente de calor externa $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que suponemos continua y acotada. Es decir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f.$$

- La solución (método de variación de las constantes) es :

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x-y) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y) f(s,y) dy ds.$$

Demostración :

Ecuación del calor estocástica

- Queremos substituir la fuente de calor externa $f(t,x)$ por un ruido blanco en espacio y tiempo que denotaremos por $\xi(t,x)$.
- Para cada (t,x), $\xi(t,x)$ será una variable aleatoria Gaussiana generalizada.

Ley normal multivariante

- Un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)$ tiene la *ley normal* $N(\mu, \Sigma)$, si su función característica es

$$E\left(e^{i\langle u,X\rangle}\right) = \exp\left(i\langle u,\mu\rangle - \frac{1}{2}u^T\Sigma u\right), \ u \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Σ es una matriz simétrica definida non-negativa.

Ley normal multivariante

- Un vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)$ tiene la *ley normal* $N(\mu, \Sigma)$, si su función característica es

$$E\left(e^{i\langle u,X\rangle}\right) = \exp\left(i\langle u,\mu\rangle - \frac{1}{2}u^T\Sigma u\right), \ u \in \mathbb{R}^n,$$

  donde $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Σ es una matriz simétrica definida non-negativa.

- $\mu = (E(X_1), \ldots, E(X_n))$

Ley normal multivariante

- Un vector aleatorio $X = (X_1, \ldots, X_n)$ tiene la *ley normal* $N(\mu, \Sigma)$, si su función característica es

$$E\left(e^{i\langle u,X\rangle}\right) = \exp\left(i\langle u, \mu\rangle - \frac{1}{2}u^T\Sigma u\right), \; u \in \mathbb{R}^n,$$

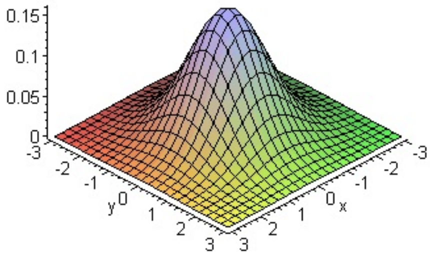
  donde $\mu \in \mathbb{R}^n$ y Σ es una matriz simétrica definida non-negativa.

- $\mu = (E(X_1), \ldots, E(X_n))$
- $\Sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$

- Si Σ is no singular, entonces X tiene una densidad de probabilidad igual a

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right).$$

Bivariate Normal



Procesos estocásticos

- Un proceso estocástico $X = \{X_\ell, \ell \in \Lambda\}$ es una familia de variables aleatorias
$$X_\ell : \Omega \to \mathbb{R}$$
definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Procesos estocásticos

- Un proceso estocástico $X = \{X_\ell, \ell \in \Lambda\}$ es una familia de variables aleatorias
$$X_\ell : \Omega \to \mathbb{R}$$
definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Las probabilidades en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,
$$P_{\ell_1,\dots,\ell_n} = P \circ (X_{\ell_1}, \dots, X_{\ell_n})^{-1}$$
donde $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \Lambda^n$, se denominan las *distribuciones marginales* del proceso X.

Teorema (Teorema de extensión de Kolmogorov)

Consideremos una familia of de probabilidades

$$\{P_{\ell_1,\dots,\ell_n},\ (\ell_1,\dots,\ell_n) \in \Lambda^n, n \geq 1\}$$

tales que :

(i) $P_{\ell_1,\dots,\ell_n}$ *es una probabilidad en* $\mathbb{R}^n$.

(ii) *(Condición de consistencia) : Si* $(\ell_{k_1},\dots,\ell_{k_m})$ *es un subvector de* $(\ell_1,\dots,\ell_n)$, *entonces* $P_{\ell_{k_1},\dots,\ell_{k_m}}$ *es la ley marginal de* $P_{\ell_1,\dots,\ell_n}$, *correspondiente a los indices* $k_1,\dots,k_m$.

Entonces, existe un proceso estocástico $\{X_\ell, \ell \in \Lambda\}$ *que tiene por distribuciones marginales la familia* $\{P_{\ell_1,\dots,\ell_n}\}$.

Familias Gaussianas

- $X = \{X_\ell, \ell \in \Lambda\}$ es una familia Gaussiana si todas sus distribuciones marginales son leyes normales multivariantes.

Familias Gaussianas

- $X = \{X_\ell, \ell \in \Lambda\}$ es una familia Gaussiana si todas sus distribuciones marginales son leyes normales multivariantes.
- La ley de una familia Gaussiana está determinada por la función media : $E(X_\ell)$ y la función de covarianza :

$$\mathrm{Cov}(X_\ell, X_m) = E((X_\ell - E(X_\ell))(X_m - E(X_m))).$$

Familias Gaussianas

- $X = \{X_\ell, \ell \in \Lambda\}$ es una familia Gaussiana si todas sus distribuciones marginales son leyes normales multivariantes.
- La ley de una familia Gaussiana está determinada por la función media : $E(X_\ell)$ y la función de covarianza :

$$\mathrm{Cov}(X_\ell, X_m) = E((X_\ell - E(X_\ell))(X_m - E(X_m))).$$

- Supongamos que $\mu : \Lambda \to \mathbb{R}$, y $\Gamma : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R}$ es simétrica y definida no negativa :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma(\ell_i, \ell_j) a_i a_j \geq 0, \quad \forall \, \ell_i \in \Lambda, \, a_i \in \mathbb{R}.$$

  Entonces, existe una familia Gaussiana con media μ y función de covarianza Γ.

Demostración :

Ruido blanco

- Λ es el conjunto de todos los subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ con medida de Lebesgue finita.
- Existe una familia Gaussiana $W = \{W(A), A \in \Lambda\}$ con media y función de covarianza :

$$E[W(A)] = 0,$$

$$\Gamma(A, B) = E[W(A)W(B)] = |A \cap B|.$$

Demostración :

- La función $(A, B) \to |A \cap B|$ es simétrica y definida nonegativa :

$$\sum_{i,j=1}^{n} |A_i \cap A_j| a_i a_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \mathbf{1}_{A_i}(t,x) \mathbf{1}_{A_j}(t,x) dxdt$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}(t,x) \right]^2 dxdt \geq 0.$$

Propiedades :

(i) Si $A_1, \dots, A_n \in \Lambda$ son disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, entonces, la variables aleatorias :

$$W(A_1), \dots, W(A_n)$$

son independientes.

- Consideremos el subespacio $\mathcal{E} \subset L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ de las funciones elementales, de la forma
$$h = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j},$$
donde $A_j \in \Lambda$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

- Consideremos el subespacio $\mathcal{E} \subset L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ de las funciones elementales, de la forma

$$h = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j},$$

donde $A_j \in \Lambda$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$.

- Definimos la aplicación $W : \mathcal{E} \to L^2(\Omega)$:

$$W(h) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j W(A_j).$$

- Consideremos el subespacio $\mathcal{E} \subset L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ de las funciones elementales, de la forma
$$h = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{1}_{A_j},$$
donde $A_j \in \Lambda$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$.
- Definimos la aplicación $W : \mathcal{E} \to L^2(\Omega)$:
$$W(h) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j W(A_j).$$
- Propiedades :
  (i) W es lineal.
  (ii) W conserva el producto escalar.

Demostración :

Integración estocástica

Proposición

El espacio $\mathcal{E}$ es denso en $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ y la aplicación $h \to W(h)$ puede extenderse a una aplicación lineal

$$W : L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \to L^2(\Omega)$$

que conserva la norma.

- Notación : $W(h) = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} h(s,x) W(dx, ds)$.

- Podemos definir el ruido blanco en un espacio de medida general $(M, \mathcal{M}, \mu)$. En este caso μ se denomina la intensidad del ruido y

$$E[W(A)W(B)] = \mu(A \cap B).$$

Movimiento browniano

- Podemos definir el ruido blanco en un espacio de medida general $(M, \mathcal{M}, \mu)$. En este caso μ se denomina la intensidad del ruido y

$$E[W(A)W(B)] = \mu(A \cap B).$$

- Ejemplo : Si W es un ruido blanco en $\mathbb{R}_+$ con intensidad la medida de Lebesgue, entonces, el proceso estocástico

$$B_t = W([0, t]), \quad t \geq 0,$$

se denomina movimiento browniano o proceso de Wiener.

Un proceso estocástico $B = \{B_t, t \geq 0\}$ se donomina movimiento browniano si :

i) $B_0 = 0$ casi seguramente.

ii) *Incrementos independientes :* Si $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$, los incrementos $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_2} - B_{t_1}$, son variables aleatorias independientes.

iii) Si $0 \leq s < t$, el incremento $B_t - B_s$ tiene la ley normal $N(0, t - s)$.

iv) Con probabilidad uno, las trayectorias $t \to B_t(\omega)$ son continuas.

Proposición

Las propiedades i), ii), iii) son equivalentes a la propiedad siguiente :

(P) *B es un proceso gaussiano con media zero y función de covarianza :*

$$\Gamma(s,t) = \min(s,t).$$

Proposición

Las propiedades i), ii), iii) son equivalentes a la propiedad siguiente :

(P) *B es un proceso gaussiano con media zero y función de covarianza :*

$$\Gamma(s,t) = \min(s,t).$$

Demostración :

a) Supongamos i), ii) y iii). La ley del vector $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$, donde $0 < t_1 < \cdots < t_n$, es normal, porque este vector es una transformación lineal del vector $\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$ que tiene componentes independientes y normales.

   La media es cero y la covarianza es, para $s < t$:

$$E(B_s B_t) = E(B_s(B_t - B_s + B_s)) = E(B_s(B_t - B_s)) + E(B_s^2) = s.$$

b) El recíproco es fácil de demostrar.

Continuidad de las trayectorias

Teorema (Criterio de continuidad de Kolmogorov)

Consideremos un proceso estocástico $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$, *tal que para todo* $s, t \in [0, T]$

$$E[|X_t - x_s|^p] \leq K|t - s|^{\alpha+1},$$

donde $p \geq 2$, $\alpha > 0$. *Entonces, existe una versión* $\widetilde{X}$ *de* X *tal que las trayectorias de* $\widetilde{X}$ *son Hölder continuas de order* γ *para todo* $\gamma < \frac{\alpha}{p}$ *:*

$$|\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s| \leq C_\gamma |t - s|^\gamma.$$

- Momentos de los incrementos del movimiento browniano :

$$E\left[(B_t - B_s)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t-s)^k, \quad s \le t$$

para todo $k \ge 1$.

- Momentos de los incrementos del movimiento browniano :

$$E\left[(B_t - B_s)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t-s)^k, \quad s \le t$$

para todo $k \ge 1$.

- En consecuencia, el Criterio de continuidad de Kolmogorov, garantiza la existencia de una versión $\widetilde{B}$ de B, tal que $\widetilde{B}$ tiene trayectorias Hölder continuas de orden γ para todo $\gamma < \frac{k-1}{2k}$ en cualquier intervalo $[0, T]$.

- Momentos de los incrementos del movimiento browniano :

$$E\left[(B_t - B_s)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!}(t-s)^k, \quad s \le t$$

  para todo $k \ge 1$.

- En consecuencia, el Criterio de continuidad de Kolmogorov, garantiza la existencia de una versión $\widetilde{B}$ de B, tal que $\widetilde{B}$ tiene trayectorias Hölder continuas de orden γ para todo $\gamma < \frac{k-1}{2k}$ en cualquier intervalo $[0, T]$.

- Conclusión : Las trayectorias del movimiento browniano son γ-Hölder continuas en $[0, T]$ para todo $\gamma < \frac{1}{2}$.

El movimiento browniano como límite de paseos aleatorios

- Consideremos una persona que partiendo del origen se desplaza un paso a la derecha con probabilidad $\frac{1}{2}$ y un paso hacia la izquierda con probabilidad $\frac{1}{2}$.
- S_n representa la posición en el instante n.

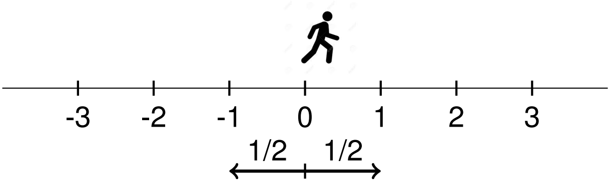
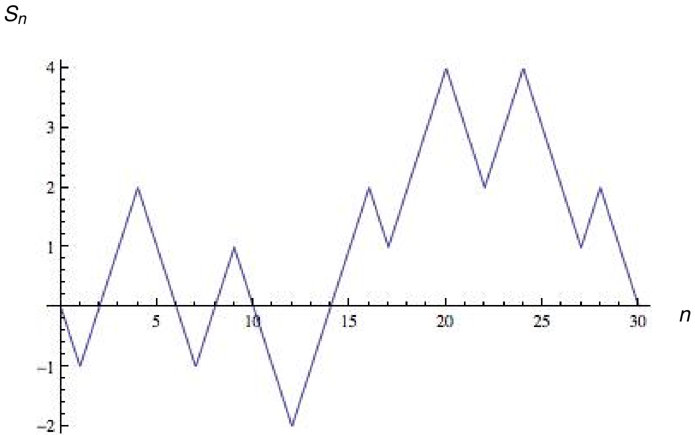


Gráfico del paso aleatorio con $n = 30$ y posiciones :

$$-1, 0, 1, 2, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, -2, -1, 0, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 1, 0$$



El eje x representa el tiempo $n = 1, 2, 3, \ldots, 30$ y el eje y representa la posición S_n.

Gráfico del paso aleatorio con $n = 300$:

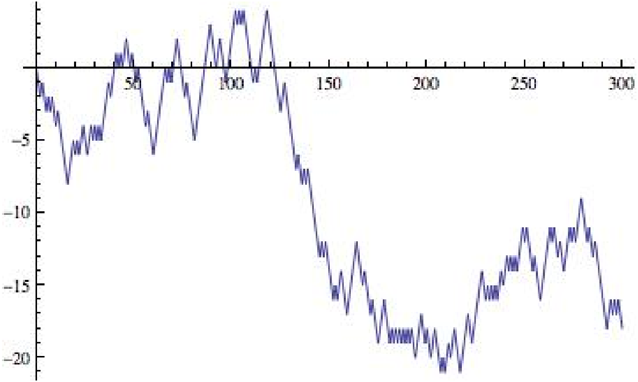


Gráfico del paso aleatorio con $n = 3,000$:

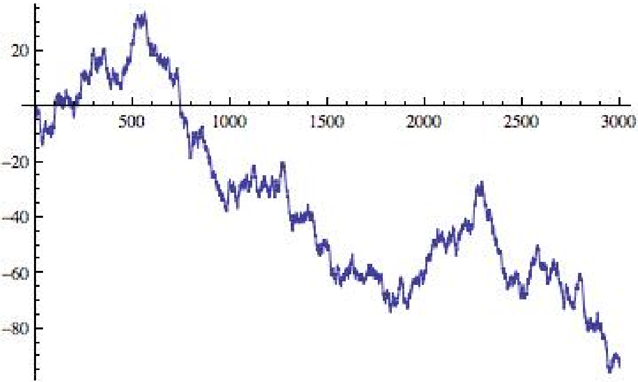
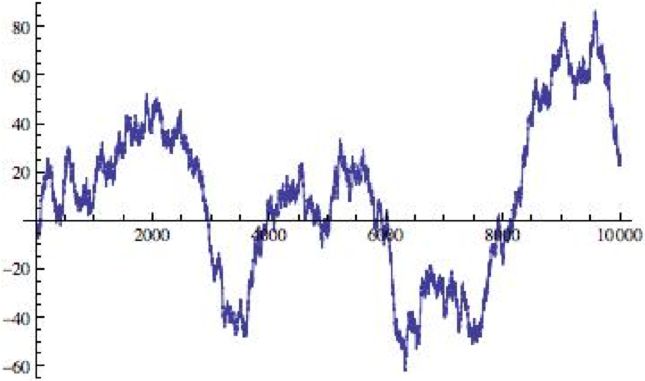
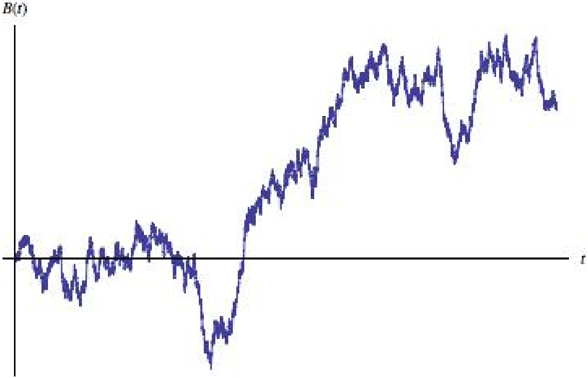


Gráfico del paso aleatorio con $n = 10,000$:



La curva continua $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n(\frac{t}{n})$, $t \in [0,1]$ converge, cuando n tiende a infinito, hacia un movimiento browniano :



- *Principio de invariancia de Donsker :* La ley del paseo aleatorio

$$\widehat{S_n} := \frac{1}{\sqrt{n}} S_n(\frac{t}{n}), \quad t \in [0,1]$$

en $C([0,1])$ converge hacia la medida de Wiener que es la ley del movimiento browniano :

$$E[\varphi(\widehat{S}_n)] \to E[\varphi(B)], \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

para toda función continua y acotada $\varphi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$.

- *Principio de invariancia de Donsker :* La ley del paseo aleatorio

$$\widehat{S_n} := \frac{1}{\sqrt{n}} S_n(\frac{t}{n}), \quad t \in [0,1]$$

en $C([0,1])$ converge hacia la medida de Wiener que es la ley del movimiento browniano :

$$E[\varphi(\widehat{S}_n)] \to E[\varphi(B)], \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

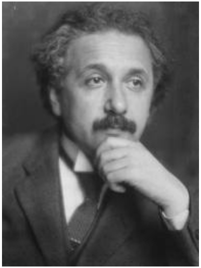
para toda función continua y acotada $\varphi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$.

- En $S_n(k) = \xi_1 + \cdots + \xi_k$, podemos suponer que las variables ξ_j son independientes, idénticamente distribuidas con media cero y varianza uno.

- El movimiento browniano es el movimiento aleatorio de partículas en suspensión en un líquido debido al bombardeo de las moléculas rápidas del líquido.
- Fue descrito en 1827 por el botánico Robert Brown, cuando estudiaba partículas de polen en agua. Fue formalmente explicado por Albert Einstein en 1905.

- El movimiento browniano es el movimiento aleatorio de partículas en suspensión en un líquido debido al bombardeo de las moléculas rápidas del líquido.
- Fue descrito en 1827 por el botánico Robert Brown, cuando estudiaba partículas de polen en agua. Fue formalmente explicado por Albert Einstein en 1905.

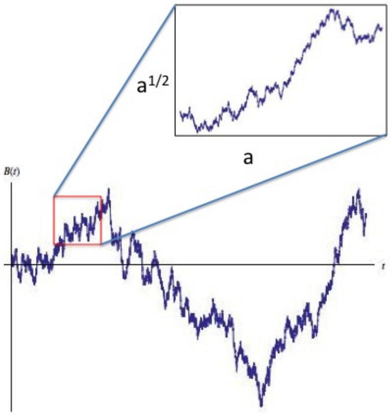
Brown



Einstein

Propiedades básicas :

1. *Autosimilaridad :*
   Para todo $a > 0$, el proceso $\{a^{-\frac{1}{2}} B_{at}, t \geq 0\}$ es también un movimiento browniano.



2. *Variación cuadrática :*

Consideremos una partición :

$$\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}.$$

Definimos $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $\Delta B_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ y $|\pi| = \max_{1 \le k \le n} \Delta t_k$.

Proposición

$$\lim_{|\pi| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2 = t,$$

donde la convergencia es en $L^2(\Omega)$.

- Aproximadamente $(\Delta B_t)^2 \sim \Delta t$

Demostración : Pongamos $\xi_k = (\Delta B_k)^2 - \Delta t_k$. Las variables ξ_k son independientes y centradas. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2 - t\right)^2\right] &= E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} E\left[\xi_k^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[3\left(\Delta t_k\right)^2 - 2\left(\Delta t_k\right)^2 + \left(\Delta t_k\right)^2\right] \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \left(\Delta t_k\right)^2 \le 2t|\pi| \stackrel{|\pi|\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Demostración : Pongamos $\xi_k = (\Delta B_k)^2 - \Delta t_k$. Las variables ξ_k son independientes y centradas. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2 - t\right)^2\right] &= E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} E\left[\xi_k^2\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[3\left(\Delta t_k\right)^2 - 2\left(\Delta t_k\right)^2 + \left(\Delta t_k\right)^2\right] \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \left(\Delta t_k\right)^2 \leq 2t|\pi| \overset{|\pi|\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

- Utilizando el Lemma de Borel-Cantelli se puede demostrar que si $\{\pi^n\}$ es una sucesión de particiones de $[0, t]$ tal que $\sum_n |\pi^n| < \infty$, entonces $\sum_{k=1}^{n} \left(\Delta B_k\right)^2$ converge casi seguramente a t.

2. *Variación total infinita :*

- Definimos

$$V_t = \sup_{\pi} \sum_{k=1}^{n} |\Delta B_k|$$

- Entonces,

$$P(V_t = \infty) = 1.$$

2. *Variación total infinita :*

- Definimos

$$V_t = \sup_{\pi} \sum_{k=1}^{n} |\Delta B_k|$$

- Entonces,

$$P(V_t = \infty) = 1.$$

Demostración : Utilizando la continuidad de las trayectorias del movimiento browniano, tenemos, en el conjunto $V_t < \infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2 \le \sup_k |\Delta B_k| \left(\sum_{k=1}^{n} |\Delta B_k| \right) \le V_t \sup_k |\Delta B_k| \overset{|\pi|\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Como $\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2$ converge en L^2 to t hacia $|\pi| \to 0$, obtenemos que $P(V_t < \infty) = 0$.

Ecuación del calor con ruido blanco aditivo

- W es un ruido blanco en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Ecuación del calor con ruido blanco aditivo

- W es un ruido blanco en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
- El proceso estocástico

$$W_{t,x} = W([0,t] \times [0,x]), \quad t,x \geq 0$$

se denomina proceso de Wiener con dos parámetros.

Ecuación del calor con ruido blanco aditivo

- W es un ruido blanco en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.
- El proceso estocástico

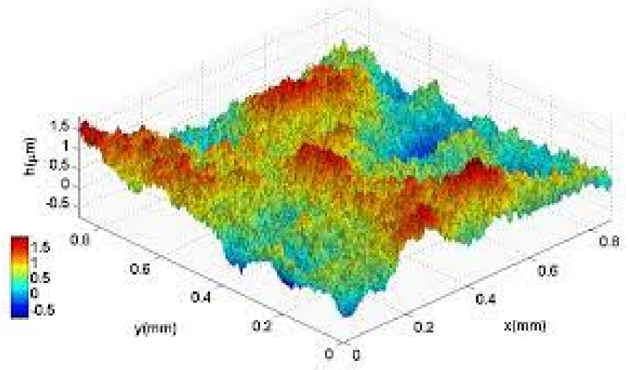
$$W_{t,x} = W([0,t] \times [0,x]), \quad t, x \geq 0$$

  se denomina proceso de Wiener con dos parámetros.
- $\{W_{t,x}, t, x \geq 0\}$ es un proceso gaussiano centrado con función de covarianza :

$$E[W_{t_1,x_1} W_{t_2,x_2}] = \min(t_1, t_2) \min(x_1, x_2).$$

- $W_{t,x}$ es un movimiento browniano en cada coordenada.

Simulación del proceso de Wiener con dos parámetros :



- Queremos resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \xi(t,x), \quad u_0 = 0,$$

donde

$$\xi(t,x) = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}(t,x).$$

- La solución por el método de variación de las constantes es :

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y)\xi(s,y)dyds.$$

- Queremos resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \xi(t,x), \quad u_0 = 0,$$

donde

$$\xi(t,x) = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}(t,x).$$

- La solución por el método de variación de las constantes es :

$$u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y)\xi(s,y)dyds.$$

- Substituyendo la integral $\xi(s,y)dyds$ por la integral estocástica respecto del ruido blanco, obtenemos

$$\boxed{u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y)W(ds,dy)}.$$

- El proceso estocástico $u(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y) W(ds,dy)$ satisface la ecuación del calor en sentido débil :

$$\langle u(t,\cdot), \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} - \langle u(0,\cdot), \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2} \int_0^t \langle u(s,\cdot), \phi'' \rangle_{L^2(\mathbb{R})} ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(y) W(ds,dy),$$

para toda función ϕ dos veces diferenciable con soporte compacto.

- La integral estocàstica $\int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y) W(ds, dy)$ está bien definida porque la función $(s, y) \to \mathbf{1}_{[0,t]}(s) p_{t-s}(x-y)$ pertenece a $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$:

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}^2(x-y) dyds = \int_0^t p_{2(t-s)}(0) ds = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} ds < \infty.$$

- Supongamos que W es un ruido blanco en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ y queremos resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + \xi(t,x), \quad u_0 = 0,$$

donde

$$\xi(t,x) = \frac{\partial^{d+1} W}{\partial t \partial x_1 \cdots \partial x_d}(t,x).$$

- Supongamos que W es un ruido blanco en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ y queremos resolver la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + \xi(t,x), \quad u_0 = 0,$$

donde

$$\xi(t,x) = \frac{\partial^{d+1} W}{\partial t \partial x_1 \cdots \partial x_d}(t,x).$$

- La solución seria $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} p_{t-s}(x-y) W(ds,dy)$ donde

$$p_{t-s}(x-y) = (2\pi(t-s))^{-\frac{d}{2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{2(t-s)}\right).$$

- Si $d \geq 2$, la integral estocástica $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} p_{t-s}(x-y) W(ds,dy)$ no existe porque

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} p_{t-s}^2(x-y) dyds = \int_0^t p_{2(t-s)}(0) dyds$$

$$= (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{d}{2}} ds = \infty.$$

- El proceso estocástico $\{u(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ es un proceso gaussiano de media zero.

- El proceso estocástico $\{u(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ es un proceso gaussiano de media zero.
- Calcularemos su función de covarianza.

- El proceso estocástico $\{u(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ es un proceso gaussiano de media zero.
- Calcularemos su función de covarianza.
- Tenemos

$$u(t,x) = W\left(\mathbf{1}_{[0,t]}(\bullet) p_{t-\bullet}(x-\star)\right).$$

$$E[u(t,x)u(s,y)] = E\left[W\left(\mathbf{1}_{[0,t]}(\bullet)p_{t-\bullet}(x-\star)\right) W\left(\mathbf{1}_{[0,s]}(\bullet)p_{s-\bullet}(y-\star)\right)\right]$$

$$= \langle \mathbf{1}_{[0,t]}(\bullet)p_{t-\bullet}(x-\star), \mathbf{1}_{[0,s]}(\bullet)p_{s-\bullet}(y-\star)\rangle_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})}$$

$$= \int_0^{t\wedge s}\int_{\mathbb{R}} p_{t-r}(x-z)p_{s-r}(y-z)dzdr$$

$$= \int_0^{t\wedge s} p_{t+s-2r}(x-y)dr$$

Caso $x = y$:

$$
\begin{aligned}
E[u(t,x)u(s,x)] &= \int_0^{t\wedge s} p_{t+s-2r}(0)dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t\wedge s} (t+s-2r)^{-\frac{1}{2}} dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\sqrt{t+s} - \sqrt{t+s-2(t\wedge s)}]
\end{aligned}
$$

Caso $x = y$:

$$
\begin{aligned}
E[u(t,x)u(s,x)] &= \int_0^{t\wedge s} p_{t+s-2r}(0)dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t\wedge s} (t+s-2r)^{-\frac{1}{2}} dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\sqrt{t+s} - \sqrt{t+s-2(t\wedge s)}]
\end{aligned}
$$

- En particular,

$$
E[u^2(t,x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2t} = \sqrt{\frac{t}{\pi}}.
$$

Supongamos $s \leq t$,

$$
\begin{aligned}
E[|u(t,x) - u(s,x)|^2] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2t} + \sqrt{2s} - 2(\sqrt{t+s} - \sqrt{t-s}) \right) \\
&\leq \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{t-s}.
\end{aligned}
$$

Esto implica

$$
E[|u(t,x) - u(s,x)|^{2k}] \leq \frac{(2k)!}{2^k k!} \left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \right)^k (t-s)^{\frac{k}{2}}.
$$

Supongamos $s \leq t$,

$$E[|u(t,x) - u(s,x)|^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2t} + \sqrt{2s} - 2(\sqrt{t+s} - \sqrt{t-s}) \right)$$
$$\leq \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{t-s}.$$

Esto implica

$$E[|u(t,x) - u(s,x)|^{2k}] \leq \frac{(2k)!}{2^k k!} \left(\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \right)^k (t-s)^{\frac{k}{2}}.$$

- Conclusión : El proceso $t \to u(t,x)$ tiene trayectorias γ-Hölder continuas para todo $\gamma < \frac{1}{4}$.

Caso $t = s$:

$$E[u(t,x)u(t,y)] = \int_0^t p_{2(t-r)}(x-y)dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-|x-y|^2/(4r)} dr$$

Esto implica

$$
\begin{aligned}
E[|u(t,x)-u(t,y)|^2] &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{r}}\left[2-2e^{-|x-y|^2/(4r)}\right]dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}|x-y|\int_0^{\frac{t}{|x-y|^2}} \frac{1}{\sqrt{z}}\left[1-e^{-1/(4z)}\right]dz \\
&\le C|x-y|.
\end{aligned}
$$

Esto implica

$$E[|u(t,x) - u(t,y)|^2] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{r}} \left[2 - 2e^{-|x-y|^2/(4r)}\right] dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} |x-y| \int_0^{\frac{t}{|x-y|^2}} \frac{1}{\sqrt{z}} \left[1 - e^{-1/(4z)}\right] dz$$

$$\leq C|x-y|.$$

- El proceso $x \to u(t,x)$ tiene trayectorias γ-Hölder continuas para todo $\gamma < \frac{1}{2}$.

Ecuación del calor amortiguada

- Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda u + \xi(t,x),$$

con condición inicial $u_0 = 0$, donde $\lambda > 0$.

Ecuación del calor amortiguada

- Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda u + \xi(t,x),$$

  con condición inicial $u_0 = 0$, donde $\lambda > 0$.

- El proceso $v(t,x) = e^{\lambda t}u(t,x)$ satisface

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + e^{\lambda t}\xi(t,x),$$

Demostración :

A partir de $v(t,x) = e^{\lambda t} u(t,x)$, obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial t} = e^{\lambda t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u \right)$$

y

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{\lambda t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Por tanto

$$\frac{\partial v}{\partial t} = e^{\lambda t} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda u + \xi(t,x) + \lambda u \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + e^{\lambda t} \xi(t,x).$$

Solución :

$$u(t,x) = e^{-\lambda t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y) e^{\lambda s} W(ds,dy)$$

- Función de covarianza :

$$E[u(t,x)u(s,y)] = e^{-\lambda(s+t)} \int_0^{t\wedge s} \int_{\mathbb{R}} p_{t-r}(x-z) p_{s-r}(y-z) e^{2\lambda r} dz dr$$

$$= e^{-\lambda(s+t)} \int_0^{t\wedge s} p_{t+s-2r}(x-y) e^{2\lambda r} dr$$

- Caso $x = y$:

$$E[u(t,x)u(s,x)] = e^{-\lambda(s+t)} \int_0^{t\wedge s} p_{t+s-2r}(0) e^{2\lambda r} dr$$

$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t\wedge s} (t+s-2r)^{-\frac{1}{2}} e^{2\lambda r} dr$$

- Caso $s = t$:

$$E[u(t,x)u(t,y)] = e^{-2\lambda t} \int_0^t p_{2(t-r)}(x-y) e^{2\lambda r} dr$$

$$= \frac{e^{-2\lambda t}}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-r}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-r)}} e^{2\lambda r} dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4r}} e^{-2\lambda r} dr$$

- Caso $s = t$:

$$E[u(t,x)u(t,y)] = e^{-2\lambda t} \int_0^t p_{2(t-r)}(x-y) e^{2\lambda r} dr$$

$$= \frac{e^{-2\lambda t}}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-r}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-r)}} e^{2\lambda r} dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4r}} e^{-2\lambda r} dr$$

- Tenemos

$$\lim_{t\to\infty} E[u(t,x)u(t,y)] = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4r}} e^{-2\lambda r} dr$$

- La covarianza

$$K(x,y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4r}}e^{-2\lambda r}dr$$

se puede expresar como

$$K(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{2\lambda}}e^{-\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}|x-y|}.$$

- La covarianza

$$K(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4r}} e^{-2\lambda r} dr$$

se puede expresar como

$$K(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2\lambda}} e^{-\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}|x-y|}.$$

- Un proceso estocástico gaussiano con covarianza $K(x,y)$ es estacionario y se denomina proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Ecuación del calor estocástica no lineal

- Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(u) + \sigma(u)\xi(t,x),$$

donde $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones que satisfacen la propiedad de Lipschitz :

$$|b(u) - b(v)| + |\sigma(u) - \sigma(v)| \leq C|u - v|.$$

Integración estocástica

- Para cada $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ es la σ-álgebra generada por las variables aleatorias $\{W(A), A \subset [0,t] \times \mathbb{R}, |A| < \infty\}$.

Integración estocástica

- Para cada $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ es la σ-álgebra generada por las variables aleatorias $\{W(A), A \subset [0,t] \times \mathbb{R}, |A| < \infty\}$.
- Un campo aleatorio $u = \{u(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ se dice que es adaptado si $u(t,x)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$.

Integración estocástica

- Para cada $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ es la σ-álgebra generada por las variables aleatorias $\{W(A), A \subset [0,t] \times \mathbb{R}, |A| < \infty\}$.
- Un campo aleatorio $u = \{u(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ se dice que es adaptado si $u(t,x)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$.
- Queremos definir la integral estocástia (Itô-Walsh) de campos aleatorios $u = \{u(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ tales que
  - $(t, x, \omega) \to u(t, x, \omega)$ es medible.
  - u es adaptado.
  - u es de cuadrado integrable :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} E(u^2(t,x)) dt dx < \infty,$$

Integración estocástica

- Para cada $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t$ es la σ-álgebra generada por las variables aleatorias $\{W(A), A \subset [0,t] \times \mathbb{R}, |A| < \infty\}$.
- Un campo aleatorio $u = \{u(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ se dice que es adaptado si $u(t,x)$ es $\mathcal{F}_t$-medible para cada $t \geq 0$ y $x \in \mathbb{R}$.
- Queremos definir la integral estocástia (Itô-Walsh) de campos aleatorios $u = \{u(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ tales que
  - $(t,x,\omega) \to u(t,x,\omega)$ es medible.
  - u es adaptado.
  - u es de cuadrado integrable :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} E(u^2(t,x))dtdx < \infty,$$

- Estos procesos forman un subespacio de $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \Omega)$ que denotaremos L^2_a.

- Para todo $0 \leq s \leq t$, $B \to W([s,t] \times B)$ define un ruido blanco en $\mathbb{R}$ de varianza $t - s$, que es independiente de la σ-álgebra $\mathcal{F}_s$.

- Para todo $0 \leq s \leq t$, $B \to W([s,t] \times B)$ define un ruido blanco en $\mathbb{R}$ de varianza $t - s$, que es independiente de la σ-álgebra $\mathcal{F}_s$.
- Si $\phi = \{\phi(x), x \in \mathbb{R}\}$ es un proceso estocástico tal que $\phi(x)$ es $\mathcal{F}_s$-medible para cada $x \in \mathbb{R}$ y tal que $E\left[\int_{\mathbb{R}} \phi^2(x) dx\right] < \infty$, entonces, ϕ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y podemos definir la integral estocástica determinista
$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) W([s,t] \times dx).$$

- Para todo $0 \leq s \leq t$, $B \to W([s,t] \times B)$ define un ruido blanco en $\mathbb{R}$ de varianza $t - s$, que es independiente de la σ-álgebra $\mathcal{F}_s$.
- Si $\phi = \{\phi(x), x \in \mathbb{R}\}$ es un proceso estocástico tal que $\phi(x)$ es $\mathcal{F}_s$-medible para cada $x \in \mathbb{R}$ y tal que $E\left[\int_{\mathbb{R}} \phi^2(x)dx\right] < \infty$, entonces, ϕ es independiente de $\mathcal{F}_s$ y podemos definir la integral estocástica determinista
$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) W([s,t] \times dx).$$
- Se cumple
$$E\left[\left|\int_{\mathbb{R}} \phi(x) W([s,t] \times dx)\right|^2\right] = (t-s) E\left[\int_{\mathbb{R}} \phi^2(x)dx\right].$$

- Consideremos el espacio $\mathcal{E}$ de los procesos elementales adaptados de la forma

$$u(t,x)=\sum_{j=1}^{m}\phi_j(x)\mathbf{1}_{(t_j,t_{j+1}]}(t),$$

donde $0\le t_1<\cdots<t_{m+1}$ y ϕ_j son procesos estocásticos $\mathcal{F}_{t_j}$-medibles tales que $E\left[\int_{\mathbb{R}}\phi_j^2(x)dx\right]<\infty$.

- Consideremos el espacio $\mathcal{E}$ de los procesos elementales adaptados de la forma

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x) \mathbf{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t),$$

  donde $0 \leq t_1 < \cdots < t_{m+1}$ y ϕ_j son procesos estocásticos $\mathcal{F}_{t_j}$-medibles tales que $E\left[\int_{\mathbb{R}} \phi_j^2(x)dx\right] < \infty$.

- Definimos la integral estocástica de un proceso u elemental :

$$I(u) := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} u(t,x) W(dt,dx) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{R}} \phi_j(x) W([t_j, t_{j+1}] \times dx).$$

Propiedades :

1. I es lineal : $I(au_1 + bu_2) = aI(u_1) + bI(u_2)$.

Propiedades :

1. I es lineal : $I(au_1 + bu_2) = aI(u_1) + bI(u_2)$.
2. Isometria :

$$E[I(u)^2] = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} E[u^2(t,x)]dxdt.$$

Propiedades :

1. I es lineal : $I(au_1 + bu_2) = aI(u_1) + bI(u_2)$.
2. Isometria :
$$E[I(u)^2] = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} E[u^2(t,x)]dxdt.$$
3. Media cero :
$$E[I(u)] = 0.$$

Demostración de la isometria : Ponemos $\xi_j = \int_{\mathbb{R}} \phi_j(x) W([t_j, t_{j+1}] \times dx)$

$$
\begin{aligned}
E[I(u)^2] &= E\left[\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j\right)^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^{m} E\left[\xi_j^2\right] + 2 \sum_{1 \le i < j \le m} E[\xi_i \xi_j] \\
&= \sum_{j=1}^{m} (t_{j+1} - t_j) \int_{\mathbb{R}} E[\phi_j^2(x)] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} E[u^2(t,x)] dx dt.
\end{aligned}
$$

- Para todo $i < j$,
$$E[\xi_i \xi_j] = E[\xi_i E[\xi_j | \mathcal{F}_{t_j}]] = 0$$
porque
$$E[\xi_j | \mathcal{F}_{t_j}] = E\left[\int_{\mathbb{R}} \phi_j(x) W([t_j, t_{j+1}] \times dx) | \mathcal{F}_{t_j} \right] = 0.$$

Proposición

El espacio $\mathcal{E}$ es denso en L^2_a y la integral estocástica puede extenderse a L^2_a, cumpliendo las propiedades de linealidad, isometria y media cero.

Solución de evolución

Teorema (Walsh '86)

Existe una única solución de evolución, que es un proceso adaptado $u = \{u(t,x), t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ *tal que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{0\leq t\leq T} E[|u(t,x)|^2] < \infty,$$

y u satisface la ecuación integral

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x-y)u_0(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y)b(u(s,y))dyds$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y)\sigma(u(s,y))W(ds,dy).$$

Demostración de la existencia :

- Supondremos $u_0 = 0$ y $b = 0$.

Demostración de la existencia :

- Supondremos $u_0 = 0$ y $b = 0$.

Método de las aproximaciones de Picard :

- Definimos $u^{(0)} = 0$ y para cada $n \geq 1$,

$$u^{(n)}(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y)\sigma(u^{n-1}(s,y))W(ds,dy).$$

Demostración de la existencia :

- Supondremos $u_0 = 0$ y $b = 0$.

Método de las aproximaciones de Picard :

- Definimos $u^{(0)} = 0$ y para cada $n \geq 1$,

$$u^{(n)}(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}(x-y)\sigma(u^{n-1}(s,y))W(ds,dy).$$

- Propiedades :

$$\sup_n \sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} E[|u^{(n)}(t,x)|^2] < \infty,$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \|u^{(n)}(t,x) - u^{(n-1)}(t,x)\|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

- Por isometria de la integral estocástica y la propiedad Lipschitz de σ :

$$
\begin{aligned}
& E[|u^{(n)}(t,x) - u^{(n-1)}(t,x)|^2] \\
& = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}^2(x-y) E[|\sigma(u^{n-1}(s,y)) - \sigma(u^{n-2}(s,y))|^2] dyds \\
& \leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}^2(x-y) E[|u^{n-1}(s,y) - u^{n-2}(s,y)|^2)] dyds.
\end{aligned}
$$

- Por isometria de la integral estocástica y la propiedad Lipschitz de σ :

$$\begin{aligned}
&E[|u^{(n)}(t,x) - u^{(n-1)}(t,x)|^2] \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}^2(x-y) E[|\sigma(u^{n-1}(s,y)) - \sigma(u^{n-2}(s,y))|^2] dyds \\
&\leq C \int_0^t \int_{\mathbb{R}} p_{t-s}^2(x-y) E[|u^{n-1}(s,y) - u^{n-2}(s,y)|^2)] dyds.
\end{aligned}$$

- Si $M_t^n = \sup_{x\in\mathbb{R}} E[|u^{(n)}(t,x) - u^{(n-1)}(t,x)|^2]$, entonces,

$$\begin{aligned}
M_t^n &\leq C \int_0^t M_s^{n-1} \left(\int_{\mathbb{R}} p_{t-s}^2(x-y)) dy \right) ds \\
&= C \int_0^t M_s^{n-1}) p_{2(t-s)}(0) ds \\
&= \frac{C}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t M_s^{n-1} \frac{1}{\sqrt{t-s}} ds.
\end{aligned}$$

- Iterando,

$$M_t^n \le \left(\frac{C}{2\sqrt{\pi}}\right)^2 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \int_0^s \frac{M_u^{n-2}}{\sqrt{s-u}} duds$$

$$= \left(\frac{C}{2\sqrt{\pi}}\right)^2 \int_0^t M_u^{n-2} \left(\int_u^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} (s-u)^{-\frac{1}{2}} ds\right) du$$

$$= K \int_0^t M_u^{n-2} du.$$

- Por tanto, si $n = 2m$
$$M_t^n \leq K^m \frac{t^m}{m!} \sup_{t \in [0,T]} M_t^0$$
y si $n = 2m + 1$,
$$M_t^n \leq K^m \frac{t^m}{m!} \sup_{t \in [0,T]} M_t^1 .$$

- Por tanto, si $n = 2m$

$$M_t^n \le K^m \frac{t^m}{m!} \sup_{t \in [0,T]} M_t^0$$

y si $n = 2m+1$,

$$M_t^n \le K^m \frac{t^m}{m!} \sup_{t \in [0,T]} M_t^1 .$$

- Estas desigualdades implican

$$\sup_{t \in [0,T]} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{M_t^n} < \infty .$$

Continuidad de las trayectorias

- Suponiendo $u_0 = 0$, para todo $p \geq 2$, $x, y \in \mathbb{R}$, $s, t \in [0, T]$,

$$E(|u(t,x) - u(s,y)|^p) \leq C_{T,p}(|s-t|^{p/4} + |x-y|^{p/2}).$$

Continuidad de las trayectorias

- Suponiendo $u_0 = 0$, para todo $p \geq 2$, $x, y \in \mathbb{R}$, $s, t \in [0, T]$,

$$E(|u(t,x) - u(s,y)|^p) \leq C_{T,p}(|s-t|^{p/4} + |x-y|^{p/2}).$$

- En consecuencia, las trayectorias de $u(t,x)$ satisfacen la propiedad Hölder :

$$|u(t,x) - u(s,y)| \leq \Gamma_{T,p,\epsilon}(|s-t|^{\frac{1}{4}-\epsilon} + |x-y|^{\frac{1}{2}-\epsilon}),$$

para todo $\epsilon > 0$, donde $\Gamma_{T,p,\epsilon}$ es una variable aleatoria tal que $E[|\Gamma_{T,p,\epsilon}||^p] < \infty$.

Desigualdad de Burkholder :

$$E\left[\left|\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u(t,x)W(dt,dx)\right|^p\right] \le (4p)^{\frac{p}{2}} E\left[\left|\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u^2(t,x)dxdt\right|^{\frac{p}{2}}\right]$$

Desigualdad de Burkholder :

$$E\left[\left|\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u(t,x)W(dt,dx)\right|^p\right] \leq (4p)^{\frac{p}{2}} E\left[\left|\int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}} u^2(t,x)dxdt\right|^{\frac{p}{2}}\right]$$

- El proceso

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u(s,x)W(ds,dx)$$

es una martingala :

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s, \quad \text{para todo} \quad s \leq t$$

con variación cuadrática

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u^2(s,x)dxds.$$

Estimaciones de momentos

Teorema

Suponemos u_0 acotado y b, σ, Lipschitz. Entonces, para todo $k \geq 2$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} E[|u(t,x)|^k] \leq L \exp(Lk^3 t),$$

donde L es una constante que depende de $\|u_0\|_\infty$ de $\sigma(0)$, $b(0)$ y de las constantes de Lipschitz de b y σ.

Estimaciones de momentos

Consideremos la ecuación con $\sigma(u) = \lambda u$, $\lambda > 0$ (Modelo Parábolico de Anderson) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u(t,x)\xi(t,x).$$

Consideremos la ecuación con $\sigma(u) = \lambda u$, $\lambda > 0$ (Modelo Parábolico de Anderson) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u(t,x)\xi(t,x).$$

Teorema (Bertini-Cancrini '95, Xia Chen '15)

Suponemos $u_0 = c > 0$. Entonces, $u(t,x) \geq 0$ y

$$E[u(t,x)^k] \geq c^k \exp\left(\frac{\lambda^4 k(k^2-1)t}{24}\right).$$

Estimaciones de momentos

Consideremos la ecuación con $\sigma(u) = \lambda u$, $\lambda > 0$ (Modelo Parábolico de Anderson) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u(t,x)\xi(t,x).$$

Teorema (Bertini-Cancrini '95, Xia Chen '15)

Suponemos $u_0 = c > 0$. Entonces, $u(t,x) \geq 0$ y

$$E[u(t,x)^k] \geq c^k \exp\left(\frac{\lambda^4 k(k^2-1)t}{24}\right).$$

- Conclusión : $E[u(t,x)^k]$ se comporta como $Ce^{Ck^3 t}$.

Fórmula de Feynman-Kac para los momentos :

$$E[u^k(t,x)] = c^k E\left[\exp\left(\lambda^2 \sum_{1\le i<j\le k} L_t^0(B^{(i)} - B^{(j)})\right)\right]$$

para todo $k \geq 2$.

1. $\{B_t^{(i)}, t \geq 0\}$, $i = 1, \ldots, k$ son movimientos brownianos independientes entre si e independientes de W.
2. $L_t^0(B^{(i)} - B^{(j)})$ denota el tiempo local en el cero del proceso $B^{(i)} - B^{(j)}$ definido como

$$L_t^0(B^{(i)} - B^{(j)}) = \int_0^t \delta_0(B_s^{(i)} - B_s^{(j)})ds.$$

Fórmula de Tanaka :

$$L_t^0(B^{(i)} - B^{(j)}) = \frac{1}{2}|B_t^{(i)} - B_t^{(j)}| - \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{sign}(B_s^{(i)} - B_s^{(j)}) d[B_s^{(i)} - B_s^{(j)}].$$

Fórmula de Tanaka :

$$L_t^0(B^{(i)} - B^{(j)}) = \frac{1}{2}|B_t^{(i)} - B_t^{(j)}| - \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{sign}(B_s^{(i)} - B_s^{(j)}) d[B_s^{(i)} - B_s^{(j)}].$$

- Por lo tanto,

$$\sum_{1 \le i < j \le k} L_t^0(B^{(i)} - B^{(j)}) \ge -\frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le k} \int_0^t \mathrm{sign}(B_s^{(i)} - B_s^{(j)}) d[B_s^{(i)} - B_s^{(j)}]$$

$$=: -\frac{1}{2} M_t.$$

- En consecuencia,

$$E[u^k(t,x)] \geq c^k E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} M_t\right)\right].$$

- En consecuencia,

$$E[u^k(t,x)] \geq c^k E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} M_t\right)\right].$$

- M_t es una martingala con variación cuadrática $\langle M \rangle_t = \frac{k(k^2-1)}{3} t$. Es decir, M_t es un movimiento browniano con varianza $\frac{k(k^2-1)}{3}$.

- En consecuencia,

$$E[u^k(t,x)] \geq c^k E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} M_t\right)\right].$$

- M_t es una martingala con variación cuadrática $\langle M\rangle_t = \frac{k(k^2-1)}{3} t$. Es decir, M_t es un movimiento browniano con varianza $\frac{k(k^2-1)}{3}$.
- Finalmente,

$$E[u^k(t,x)] \geq c^k E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\sqrt{\frac{k(k^2-1)}{3}} B_t\right)\right]$$

$$= c^k \exp\left(-\frac{\lambda^2}{24} k(k^2-1)t\right).$$

Intermitencia

Exponente de Lyapunov :

$$\gamma_k(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E[u(t,x)^k], \quad k \geq 2.$$

Intermitencia

Exponente de Lyapunov :

$$\gamma_k(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E[u(t,x)^k], \quad k \geq 2.$$

- Bertini-Cancrini '95 y Xia Chen, '15 demostraron que $\gamma_k(x)$ no depende de x ($x \to u(t,x)$ es estacionario) y

$$\gamma_k = \lambda^4 \frac{k(k^2-1)}{24}.$$

Intermitencia

Exponente de Lyapunov :

$$\gamma_k(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log E[u(t,x)^k], \quad k \geq 2.$$

- Bertini-Cancrini '95 y Xia Chen, '15 demostraron que $\gamma_k(x)$ no depende de x ($x \to u(t,x)$ es estacionario) y

$$\gamma_k = \lambda^4 \frac{k(k^2-1)}{24}.$$

- En particular $\frac{\gamma_k}{k}$ es estrictamente creciente, y esto implica que la solución es intermitente, es decir, desarrolla unas pocas cimas muy altas y muchos valles bajos cuando el tiempo es grande.

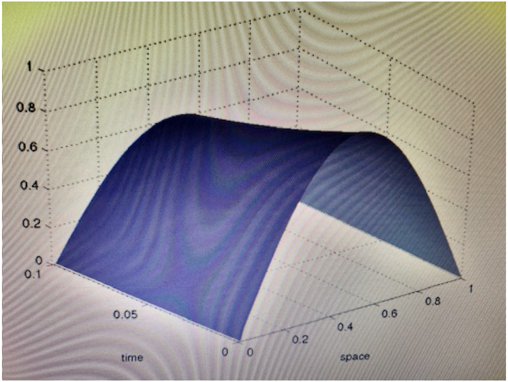
- Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda u(t,x)\xi(t,x), \quad t > 0, x \in [0,1].$$

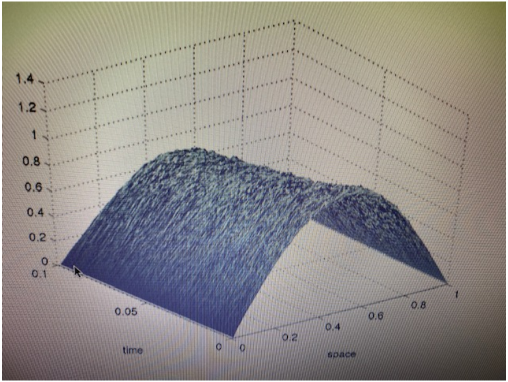
con condición inicial $u_0(x) = \sin(\pi x)$ y condiciones de Dirichlet $u(t,0) = u(t,1) = 0$.

- Si $\lambda = 0$ la solución es

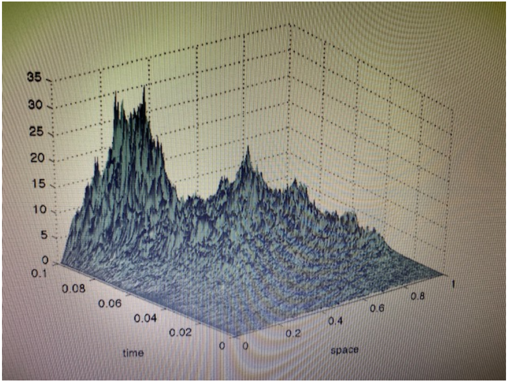
$$u(t,x) = \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t/2} :$$



- Si $\lambda = 0.1$ el ruido es pequeño y obtenemos una perturbación del caso determinista :



- Si $\lambda = 2$ el ruido es mayor y obtenemos el valor máximo de la similaci'on es 30.



- Si $\lambda = 5$ la solución es muy diferente del caso determinista y vemos que el gráfico presenta cimas muy altas.